2.9.7 Soustavy exponenciálních rovnic

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{aligned} 2\cdot 3^x + 3\cdot 4^y &= 24 \\ 3\cdot 3^x - 10\cdot 4^y &= 7 \end{aligned}$.

Substituce: $a = 3^x$, $b = 4^y$

Soustava rovnic: $\begin{aligned} 2a + 3b &= 24 \quad /\cdot 3 \\ 3a - 10b &= 7 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$. $\qquad \begin{aligned} 6a + 9b &= 72 \\ 6a - 20b &= 14 \end{aligned}$

Rovnice odečteme: $29b = 58$. $\quad b = 2$

Dopočteme a: $2a + 3b = 2a + 6 = 24$. $\quad 2a = 18 \quad a = 9$

$a = 9 = 3^x \quad 3^2 = 3^x \quad x = 2 \qquad b = 2 = 4^y \quad 4^{\frac{1}{2}} = 4^y \quad y = \frac{1}{2}$

$K = \left\{ \left[2; \frac{1}{2} \right] \right\}$

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{aligned} 0,5^x + 3^{y-1} &= 25 \\ 2\cdot 0,5^{x+3} - 3^{y-2} &= 1 \end{aligned}$.

- $a = 0,5^{x+3}$ (u základu $0,5$ se nám hodí, když u něj zbudou záporné mocniny)
- $b = 3^{y-2}$ (u základu 3 chceme, aby zbyly kladné mocniny)

Substituce: $a = 0,5^{x+3}$, $0,5^x = 0,5^{x+3-3} = 0,5^{x+3}\cdot 0,5^{-3} = a\cdot 0,5^{-3} = 8a$,

$b = 3^{y-2}$, $3^{y-1} = 3^{y-2+1} = 3^{y-2}3^1 = 3b$

Soustava rovnic: $\begin{aligned} 8a + 3b &= 25 \\ 2a - b &= 1 \end{aligned}$.

Z druhé rovnice vyjádříme b a dosadíme do první: $2a - b = 1 \Rightarrow b = 2a - 1$.

$8a + 3(2a-1) = 25 \quad 8a + 6a - 3 = 25 \quad 14a = 28 \quad a = 2$

Dopočteme b: $b = 2a - 1 = 2\cdot 2 - 1 = 3$.

$a = 2 = 0,5^{x+3} \quad 2^1 = \left(2^{-1}\right)^{x+3}$

$2^1 = 2^{-x-3} \quad 1 = -x - 3 \quad x = -4$

$b = 3 = 3^{y-2}$

$1 = y - 2$

$y = 3$

$K = \{[-4; 3]\}$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} 81^{x+y} &= 27 \\ 81^x + 81^y &= 12 \end{aligned}$.

$\begin{aligned} 81^{x+y} &= 27 \\ 81^x + 81^y &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 81^x\cdot 81^y &= 27 \\ 81^x + 81^y &= 12 \end{aligned}$

Substituce: $81^x = a$, $81^y = b$

$\begin{aligned} a\cdot b &= 27 \\ a + b &= 12 \end{aligned}$

Z druhé rovnice vyjádříme a dosadíme do první: $a + b = 12 \Rightarrow b = 12 - a$.

$ab = 27 \quad a(12-a) = 27 \quad 12a - a^2 = 27 \quad a^2 - 12a + 27 = 0$

$(a-3)(a-9) = 0 \quad a_1 = 3 \Rightarrow b_1 = 12 - a = 12 - 3 = 9 \quad a_2 = 9 \Rightarrow b_1 = 12 - a = 12 - 9 = 3$

Návrat k původní proměnné:

První řešení:

$a_1 = 81^{x_1} = 3$ $\qquad$ $b_1 = 81^{y_1} = 9$

$81^{x_1} = 3$ $\qquad$ $81^{y_1} = 9$

$81^{x_1} = 81^{\frac{1}{4}}$ $\qquad$ $81^{y_1} = 81^{\frac{1}{2}}$

$x_1 = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $y_1 = \frac{1}{2}$

$K = \left\{\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right];\left[\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right]\right\}$

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} 2^{x+y} + 2^{x-y-1} &= 3^2 \\ 2^{x+y+1} - 3\cdot 2^{x-y+1} &= 2^2 \end{aligned}$.

$a = 2^{x+y}$, $2^{x+y+1} = 2^{x+y}\cdot 2 = 2a$

$b = 2^{x-y-1}$ (vyhneme se zlomkům), $2^{x-y+1} = 2^{x-y-1+2} = 2^{x-y-1}\cdot 2^2 = 4b$

$$\begin{aligned} a + b &= 9 \\ 2a - 3\cdot 4b &= 4 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme a a dosadíme do druhé: $a+b=9 \Rightarrow a = 9-b$.

$2(9-b)-12b = 4$ $\qquad$ $18-2b-12b=4$ $\qquad$ $14 = 14b$ $\qquad$ $b = 1$

Dopočteme a: $a = 9-b = 9-1 = 8$.

$a = 2^{x+y} = 8$ $\qquad$ $2^{x+y} = 2^3$ $\qquad$ $x+y=3$ $\qquad$ $b = 2^{x-y-1} = 1$ $\qquad$ $2^{x-y-1} = 2^0$ $\qquad$ $x-y-1=0$

$$\begin{aligned} x+y&=3 \\ x-y-1&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y&=3 \\ x-y&=1 \end{aligned}$$

(rovnice sečteme) $2x = 4 \Rightarrow x = 2$

Dosadíme do druhé rovnice a dopočteme y: $2-y=1 \Rightarrow y=1$. $\qquad$ $K = \{[2;1]\}$

Př. 5: Urči reálná čísla a, b tak, aby graf funkce $y = 2^{x+a} + b$ procházel body $[-1;-2]$, $[2;12]$.

$[-1;-2] \Rightarrow -2 = 2^{-1+a} + b$ $\qquad$ $[2;12] \Rightarrow 12 = 2^{2+a} + b$

$12-(-2) = 2^{2+a} - 2^{-1+a}$ $\qquad$ $14 = 2^2\cdot 2^a - 2^{-1}\cdot 2^a$ $\qquad$ $14 = 4\cdot 2^a - \frac{1}{2}\cdot 2^a$

$14 = 2^a\left(4-\frac{1}{2}\right) = 2^a\cdot 3{,}5$ $\qquad$ $28 = 7\cdot 2^a$ $\qquad$ $2^a = 4$ $\quad$ $a = 2$

Dopočítáme b: $-2 = 2^{-1+a} + b = 2^{-1+2} + b = 2 + b$ $\qquad$ $b = -4$

Hledaná funkce má předpis $y = 2^{x+2} - 4$.

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} x^{y+1} &= 16 \\ x^{3-y} &= 1 \end{aligned}$.

$[1]\cdot[2]$ $\qquad$ $x^{y+1}\cdot x^{3-y} = 16\cdot 1$ $\qquad$ $x^{y+1+3-y} = 16$ $\qquad$ $x^4 = 2^4$

$x = \sqrt[4]{2^4} = 2$ (řešením rovnice $x^4 = 16$ je i číslo –2, které však není řešením naší soustavy, protože v ní číslo x vystupuje jako základ mocnin)

Dopočteme y: $2^{3-y} = 1 = 2^0$ $\qquad$ $3-y=0$ $\qquad$ $y = 3$ $\qquad$ $K = \{[2;3]\}$

Př. 7: Petáková:
strana 34/cvičení 8 b) c) e) f)